2.7 Aplicaciones del Teorema de Jordan

En esta sección seguimos suponiendo que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Endomorfismos y matrices nilpotentes

■ **Definición** Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Decimos que un endomorfismo $f : V \to V$ es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = 0$.

Observación Evidentemente, si $f : V \to V$ es un endomorfismo cualquiera que tiene matriz asociada A respecto de una cierta base de V, se tiene que f es nilpotente si y solo si A es nilpotente.

■ **Proposición** *Un endomorfismo f es nilpotente si y solo si su único autovalor es* 0.

Demostración. Supongamos que $f^k = 0$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor. Entonces existe un $v \in V$ no nulo tal que $f(v) = \lambda v$, y por tanto $f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$, y si hacemos esto repetidamente llegamos a que

$$f^k(v) = \lambda^k v \Rightarrow 0 = \lambda^k v \Rightarrow \lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

Supongamos ahora que el único autovalor de f es 0. Entonces por el Teorema A sabemos que $M(0) = V$, es decir, que

$$\operatorname{Ker}(f - 0I)^{\operatorname{nil}(0)} = V,$$

es decir, $f^{\operatorname{nil}(0)} = 0$ y por tanto f es nilpotente. □

Observación Si $f : V \to V$ es un endomorfismo con un único autovalor λ entonces $f - \lambda I$ es un endomorfismo cuyo único autovalor es 0 y por tanto $f - \lambda I$ es nilpotente.

■ **Corolario** *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Entonces existen endomorfismos $f_d : V \to V$ diagonalizable y $f_n : V \to V$ nilpotente tales que $f = f_d + f_n$ y $f_d \circ f_n = f_n \circ f_d$.*

Demostración. Por el Teorema de Jordan existe una base B de V respecto de la cual f tiene una matriz J de Jordan. La matriz J la podemos escribir de la forma

$$J = D + N$$

donde D es la matriz diagonal cuya diagonal coincide con la de J, y donde $N = J - D$. La matriz N es triangular superior con ceros en la diagonal, y por tanto es nilpotente puesto que su único autovalor es el cero. Por tanto, si denotamos por $f_d : V \to V$ y $f_n : V \to V$ a los endomorfismos cuyas matrices respecto de B son D y N respectivamente, entonces tenemos que f_d es diagonalizable, f_n es nilpotente y $f_d \circ f_n = f_n \circ f_d$ (ya que $DN = ND$). □

■ **Proposición** *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ su matriz respecto de cierta base. Entonces f es nilpotente (y por tanto A) si y solo si*

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = \cdots \operatorname{tr}(A^n) = 0.$$

Demostración. Debemos probar que f tiene como único autovalor al 0. Denotemos por $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ todos los autovalores distintos de f. Por el Teorema de Jordan, tenemos que A es semejante a su forma canónica de Jordan J. En la diagonal de J aparece cada autovalor tantas veces como su multiplicidad algebraica. Es decir, la traza de J es

$$0 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(J) = \operatorname{mult}_a(\lambda_1)\lambda_1 + \cdots + \operatorname{mult}_a(\lambda_r)\lambda_r.$$

De forma general, para cada $k = 1, \dots, n$, la matriz A^k es semejante a J^k, y en la diagonal de J^k aparece λ_i^k tantas veces como su multiplicidad algebraica de λ_i, es decir,

$$0 = \operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(J^k) = \operatorname{mult}_a(\lambda_1)\lambda_1^k + \cdots + \operatorname{mult}_a(\lambda_r)\lambda_r^k.$$

En particular, como $r \leq n$ ya que como mucho podemos tener n autovalores distintos (que es el grado del polinomio característico) si tomamos las primeras r ecuaciones anteriores obtenemos el sistema,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \operatorname{mult}_a(\lambda_1)\lambda_1 & + & \cdots & + & \operatorname{mult}_a(\lambda_r)\lambda_r & = & 0, \\ & & \vdots & & & & \\ \operatorname{mult}_a(\lambda_1)\lambda_1^r & + & \cdots & + & \operatorname{mult}_a(\lambda_r)\lambda_r^r & = & 0, \end{array} \right.$$

que matricialmente podemos escribir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} \operatorname{mult}_a(\lambda_1) \\ \vdots \\ \operatorname{mult}_a(\lambda_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Supongamos primero que ninguno de los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ es 0. Entonces hemos llegado a una contradicción puesto que Q es una matriz de Vandermonde, y como los autovalores son distintos,

$$\det(Q) = \lambda_1 \cdots \lambda_r \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0,$$

así que Q es invertible, y por tanto

$$\begin{pmatrix} \operatorname{mult}_a(\lambda_1) \\ \vdots \\ \operatorname{mult}_a(\lambda_r) \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual es absurdo ya que las multiplicidades son números naturales y por tanto son mayores o iguales que 1.

Por tanto uno de los autovalores es 0, y reordenando podemos asumir que $\lambda_r = 0$. Si no hay más autovalores, hemos terminado. En caso contrario, eliminando la última ecuación en el sistema anterior obtenemos que

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \operatorname{mult}_a(\lambda_1)\lambda_1 & + & \cdots & + & \operatorname{mult}_a(\lambda_{r-1})\lambda_{r-1} & = & 0, \\ & & \vdots & & & & \\ \operatorname{mult}_a(\lambda_1)\lambda_1^{r-1} & + & \cdots & + & \operatorname{mult}_a(\lambda_r)\lambda_{r-1}^{r-1} & = & 0, \end{array} \right.$$

y llegamos de nuevo a una contradicción. $\square$

Ejemplo 4 Demostrar que el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & \cdots & + & x_n & = & 0 \\ x_1^2 & + & \cdots & + & x_n^2 & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & + & \cdots & + & x_n^n & = & 0 \end{array} \right.$ no tiene más solución en $\mathbb{C}$ que la trivial. Supongamos que $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ es una solución del sistema. Consideremos la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

Evidentemente se tiene que $\operatorname{tr}(D^i) = x_1^i + \cdots + x_n^i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por tanto D es nilpotente, es decir, existe $k \leq 1$ tal que $D^k = 0$, lo cual implica que $x_1^k = \cdots = x_n^k = 0$ y por tanto $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Potencias de matrices

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz. Queremos calcular sus potencias A^k de forma sencilla aplicando el Teorema de Jordan. Por dicho teorema, sabemos que existe una matriz de Jordan $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ regular tales que $A = PJP^{-1}$ y por tanto $A^k = PJ^kP^{-1}$. Así que todos se reduce a calcular las potencias de matrices de Jordan. De hecho, como dichas matrices son diagonales por bloques de la forma

$$J = \left(\begin{array}{c:c:c} J_1 & & \\ \hdashline & \ddots & \\ \hdashline & & J_r \end{array}\right)$$

donde cada J_i es un cierto bloque Jordan, se tiene que

$$J^k = \left(\begin{array}{c:c:c} J_1^k & & \\ \hdashline & \ddots & \\ \hdashline & & J_r^k \end{array}\right)$$

así que todo se reduce de nuevo a calcular las potencias de los bloques de Jordan. Un bloque de Jordan es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$$

el cual podemos escribir de la forma

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & \lambda \end{pmatrix}}_{\lambda I_m} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix}}_{N_m}$$

En Matemáticas Básicas probamos el binomio de Newton, es decir, vimos que dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j.$$

Si uno recupera la demostración y la vuelve a leer pensando que a y b son dos matrices cuadradas que conmutan, entonces descubrirá que la prueba sigue siendo válida. En nuestro caso, como evidentemente la matrices λI_m y N_m conmutan, se tiene que

$$M^k = (\lambda I_m + N_m)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} I_m N_m^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N_m^j.$$

Además, la matriz N_m^j es fácil de calcular: es una matriz con todas las entradas nulas excepto en la diagonal j-ésima por encima de la diagonal principal, cuyas entradas son todas 1. En particular, para $j \geq m$ se tiene que $N_m^j = 0$.

Ejemplo 5 Sea
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} M^k =& \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^{k-j} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^j = \\ =& \binom{k}{0} 2^{k-0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0 + \binom{k}{1} 2^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ =& 2^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k2^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ejemplo 6 Calcular $\sum_{k=0}^{2000} (-1)^k M^k$ para la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Haciendo las cálculos llegamos a que la forma canónica de Jordan de la matriz anterior es

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con matriz de paso } P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$J^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2000} (-1)^k J^k &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{2000} (-1)^k (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{2000} (-1)^k & \sum_{k=0}^{2000} (-1)^k k \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{2000} (-1)^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2001 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sum_{k=0}^{2000} (-1)^k k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2001 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ya que agrupando de dos en dos nos damos cuenta de que $\sum_{k=0}^{2000} (-1)^k k = 1000$. Así que finalmente

$$\sum_{k=0}^{2000} (-1)^k M^k = P\Big(\sum_{k=0}^{2000} (-1)^k J^k\Big) P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2000 & 2000 \\ 1000 & 2001 & -2000 \\ 1000 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7 Queremos calcular

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{15}$$

Haciendo los cálculos llegamos a que su forma canónica de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con matriz de paso } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene entonces que

$$A^{15} = PJ^{15}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -15 \\ 15 & -14 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8 ¿Es diagonalizable un endomorfismo f de $\mathbb{C}^2$ tal que f^k es la identidad de $\mathbb{C}^2$ para cierto entero $k \geq 1$? Lo primera observación obvia es que si $k = 1$ entonces la respuesta es sí, f es diagonalizable. Así que podemos suponer que $k > 1$. Por el Teorema de Jordan sabemos que existe una base de $\mathbb{C}^2$ respecto de la cual f tiene una matriz J de Jordan. Si f no es diagonalizable entonces la única posibilidad es que J sea de la forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Por otro lado sabemos que f^k es la identidad, es decir, que

$$J^k = I \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto $k\lambda^{k-1} = 0$ de lo que deducimos que $\lambda = 0$. Pero entonces también tendríamos que $0 = \lambda^k = 1$, absurdo. Por tanto la respuesta final es sí, f debe ser diagonalizable.